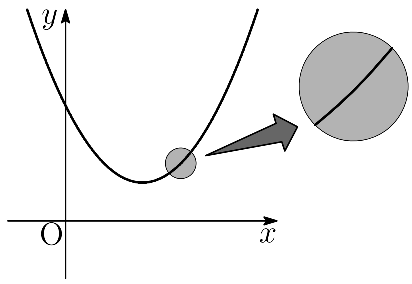
第 6 章　微分と積分

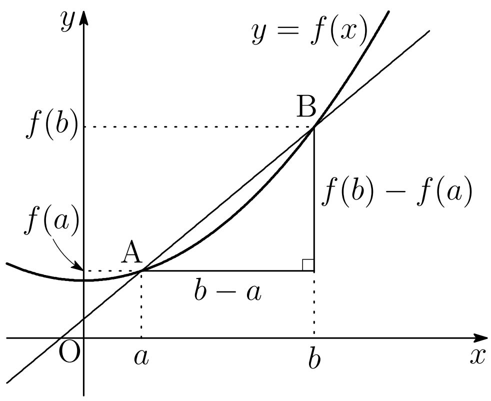
6.1　微分係数と導関数

6.1.1　微分係数



関数のグラフの非常にせまい部分を拡大してみると，ほとんど直線のようにみえる．
このことを，極限という概念から考えることにしよう．

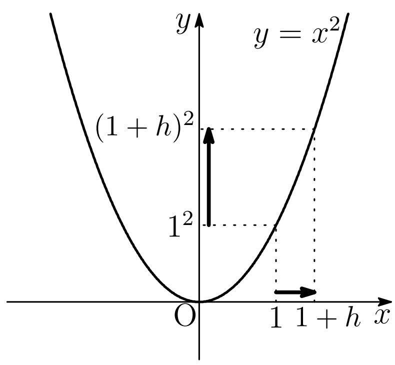
A 平均変化率



関数 $y = f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，

$$\frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

である．この値を，$x = a$ から $x = b$ までの，$f(x)$ の**平均変化率**という．
この平均変化率は，右の図で直線 AB の傾きを表している．



例 6.1 2 次関数 $y = x^2$ において，$x = 1$ から $x = 1 + h$ までの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{(1+h)^2 - 1^2}{(1+h) - 1} &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2+h)}{h} \\ &= 2 + h\end{aligned}$$

練習 6.1 次の平均変化率を求めよ．

(1) 1次関数 $y = 2x$ の，$x = a$ から $x = b$ までの平均変化率

(2) 2次関数 $y = -x^2$ の，$x = 2$ から $x = 2 + h$ までの平均変化率

B 極限値

例 6.1 で求めた平均変化率 $2 + h$ の値について，x の変化量 h を

0.1，0.01，0.001，0.0001，$\cdots$

または -0.1，-0.01，-0.001，-0.0001，$\cdots$ ← $h<0$ でもよい．

のように，0 の両側から限りなく 0 に近づけてみよう．
すると，$2 + h$ は 2 に限りなく近づくことがわかる．

h	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	$\cdots$	0	$\cdots$	0.0001	0.001	0.01	0.1
$2+h$	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1

このことを，

h が 0 に限りなく近づくとき，$2 + h$ の**極限値**は 2 である

といい，記号 **lim** を用いて次のように書く[1]．

$$\lim_{h \to 0}(2 + h) = 2$$

極限値の例を，ほかにも示そう．

例 6.2 (1) $\lim_{h \to 0}(4 - h) = 4$

(2) $\lim_{h \to 0}(3 + 3h + h^2) = 3$ ← $3h$ と h^2 はどちらも 0 に限りなく近づく．

[1] lim は「極限」を意味する英語 limit の略である．また，h が 0 に限りなく近づく場合，h は 0 と異なる値をとりながら 0 に近づくと約束する．

練習 6.2 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{h \to 0}(6+h)$　　(2) $\lim_{h \to 0}(12-6h+h^2)$

C 微分係数

関数 $f(x)$ の，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において，h が限りなく 0 に近づくとき，この平均変化率が限りなく一定の値に近づくならば，その極限値を

関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**または変化率

といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す.

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

例 6.3 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数は

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(4+h) = 4 \end{aligned}$$

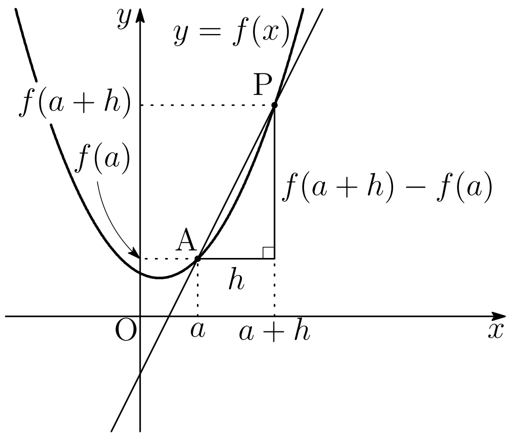
練習 6.3 次の微分係数を求めよ.

(1) 関数 $f(x)=x^2$ において，$x=1$ における微分係数

(2) 関数 $f(x)=3x^2$ において，$x=-2$ における微分係数

D 微分係数と接線

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分係数 $f'(a)$ をもつとき，その図形的な意味を調べてみよう．



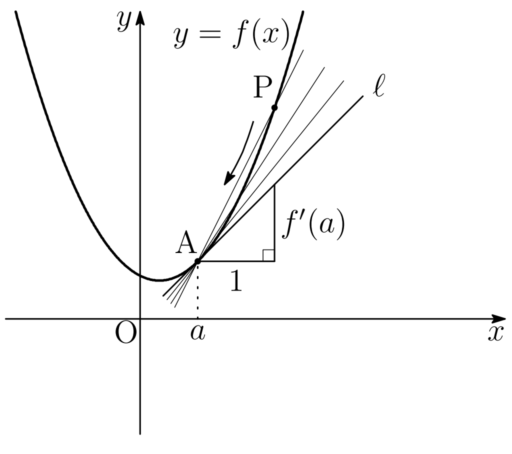
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に2点

$$\mathrm{A}(a,\ f(a)),\ \mathrm{P}(a+h,\ f(a+h))$$

をとると，直線 AP の傾きは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

であり，関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率に等しい．



h が0に限りなく近づくとき，点 P は限りなく点 A に近づく．したがって，関数 $f(x)$ が微分係数 $f'(a)$ をもつとき，直線 AP は点 A を通る傾きが $f'(a)$ の直線 ℓ に限りなく近づくといえる．

この直線 ℓ を，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A における**接線**といい，A を**接点**という．

以上をまとめると，次のことがいえる．

接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい．

例 6.4 $\boldsymbol{y = x^2}$ **のグラフ上の点 (2, 4) における接線の傾き** $\boldsymbol{m}$

$f(x) = x^2$ とすると　　$m = f'(2)$

例 6.3 より，$f'(2) = 4$ であるから　　$m = 4$

練習 6.4 $y = x^2$ のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ．

(1) 点 $(1,\ 1)$　　(2) 点 $(-2,\ 4)$

6.1.2　導関数とその計算

関数 $f(x)$ が与えられたとき，$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は a の式で表される．ここでは，微分係数をもっと一般的に考えてみよう．

A 導関数

関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は，次のようになる．

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h) = 2a \end{aligned}$$

すなわち　　$f'(a) = 2a$　　$\cdots$ ①

① を利用すると，x のいろいろな値における微分係数が求められる．
たとえば，微分係数 $f'(3)$ を求めるには，① に $a = 3$ を代入すればよい．

練習 6.5 関数 $f(x) = x^2$ について，次の微分係数を求めよ．

(1) $f'(3)$　　(2) $f'(0)$　　(3) $f'(-2)$

① において，a の値を決めるとそれに応じて，$f'(a)$ の値がただ 1 つ定まる．すなわち a を変数とみると，$f'(a)$ は a の関数といえる．

一般に，関数 $f(x)$ において，x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると，x の関数が得られる．このようにして得られる新しい関数を $f(x)$ の**導関数**といい，$\boldsymbol{f'(x)}$ で表す．

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で求められる．

導関数 $\boldsymbol{f'(x)}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

例 6.5

(1) 関数 $f(x) = x$ の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

(2) 関数 $f(x) = x^3$ の導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} && \longleftarrow (x+h)^3 = x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2 && \longleftarrow 3xh \text{ と } h^2 \text{は限りなく } 0 \text{ に近づく．} \end{aligned}$$

(3) 関数 $f(x) = 2$ の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h} = 0$$

例 6.5(3) のように，一定の値しかとらない関数を**定数関数**という．

練習 6.6 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $f(x) = 3x$　　(2) $f(x) = -x^2$

(3)　$f(x) = 4$

関数 $y = f(x)$ の導関数を，$\boldsymbol{y'}$ や $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ で表すこともある．

また，関数 x^3 のように，単に x の式だけで関数を示すこともあるが，このときは，関数 x^3 の導関数を $(x^3)'$ のように表す．

これまでに調べたことから，次のことがいえる．

$$(x)' = 1,\quad (x^2)' = 2x\quad (x^3)' = 3x^2$$

以上をまとめると，次のようになる．ただし，$n = 1,\ 2,\ 3$ である．

関数 $\boldsymbol{x^n}$ と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

定数関数 c の導関数は　$\boldsymbol{(c)' = 0}$

$\longleftarrow$ n=1 のとき x^0=1 である．

B 関数の微分

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ **で微分する**または単に**微分する**という．

$f(x) = x^3$，$g(x) = x^2$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ をもとに，関数 $y = 2f(x)$ や $y = f(x) + g(x)$ などを微分してみよう．

たとえば，関数 $y = 2x^3$ すなわち $y = 2f(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h} = \lim_{h\to 0} 2\left\{\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right\}\\
&= \lim_{h\to 0} 2(3x^2 + 3xh + h^2) = \lim_{h\to 0}(2\cdot 3x^2 + 2\cdot 3xh + 2h^2)\\
&= 2\cdot 3x^2
\end{aligned}$$

ここで，$f'(x) = 3x^2$ であるから，次のことがいえる．

$y = 2f(x)$ を微分すると　　$y' = 2f'(x)$

次に，関数 $y=x^3+x^2$ すなわち $y=f(x)+g(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)^2\}-(x^3+x^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\{(3x^2+3xh+h^2)+(2x+h)\} \\ &= 3x^2+2x \end{aligned}$$

ここで，$f'(x)=3x^2$，$g'(x)=2x$ であるから，次のことがいえる．

$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　　$y'=f'(x)+g'(x)$

同様にして，次のこともいえる．

$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　　$y'=f'(x)-g'(x)$

一般に，次のことが成り立つことが知られている．

関数の定数倍および和，差の導関数

k を定数とする．

1　$y=kf(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y'=kf'(x)}$

2　$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y'=f'(x)+g'(x)}$

3　$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y'=f'(x)-g'(x)}$

上のことを用いて，関数を微分してみよう．

例 6.6　関数 $y=3x^2-4x+2$ を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 3(x^2)'-4(x)'+(2)' && \leftarrow y'=(3x^2)'-(4x)'+(2)' \\ &= 3\cdot 2x-4\cdot 1+0 && =3(x^2)'-4(x)'+(2)' \\ &= 6x-4 \end{aligned}$$

練習 6.7　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=3x^2+2x-4$　　(2)　$y=-x^2+x+3$

(3)　$y=4x^3-2x^2-5x$　　(4)　$y=\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-1$

例題 6.1 次の関数を微分せよ．

$$y = x(x+1)(x-2)$$

【解】

$$x(x+1)(x-2) = x(x^2-x-2) = x^3-x^2-2x$$

よって　$y = x^3 - x^2 - 2x$

したがって　$y' = 3x^2 - 2x - 2$

練習 6.8 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (x+2)(x+3)$　　(2) $y = 3(x-2)^2$

(3) $y = x(x+2)(x-2)$　　(4) $y = 2x(x+1)(x-3)$

応用例題 6.1 次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f'(0) = 3, \quad f'(1) = -1, \quad f(2) = -2$$

考え方　$f(x) = ax^2 + bx + c$ として，条件を定数 a，b，c の等式で表す．

【解】 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると　$f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = 3$ より　$b = 3$

$f'(1) = -1$ より　$2a + b = -1$

$f(2) = -2$ より　$4a + 2b + c = -2$

よって　$a = -2$，$b = 3$，$c = 0$

したがって，$f(x)$ は　$f(x) = -2x^2 + 3x$

練習 6.9 次の条件をすべて満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f'(0) = -3,\ f'(1) = 1,\ f(0) = 2$$

C いろいろな関数の導関数

変数が x，y でない関数についても，同様に導関数を考える．

たとえば，t の関数 $s = f(t)$ の導関数は，$\boldsymbol{s'}$，$\boldsymbol{f'(t)}$，$\boldsymbol{\dfrac{ds}{dt}}$ などで表す．

例 6.7 a を定数とする．t の関数 $s = -\dfrac{1}{2}at^2$ を t で微分すると

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2}a\cdot 2t = -at$$

$\longleftarrow$ 変数がわかるように，$\frac{ds}{dt}$ で表している．

練習 6.10 半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$，$S = 4\pi r^2$ である．V と S を，それぞれ r で微分せよ．

6.1.3　接線の方程式

関数の導関数を利用すると，微分係数も計算しやすい．そこで，関数のグラフ上の点における接線の方程式を，導関数を用いて求めてみよう．

A 接線の方程式

例題 6.2　関数 $y = -2x^2 + 4x + 1$ のグラフ上に点 A(2, 1) をとる．

(1) 点 A における接線 ℓ の傾き m を求めよ．

(2) 点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ．

【解】

(1) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ とすると，$m = f'(2)$ である．

$f(x)$ を微分すると　$f'(x) = -4x + 4$

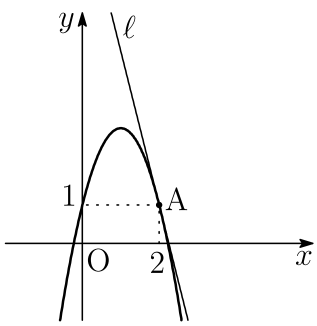
よって　$m = f'(2) = -4 \cdot 2 + 4 = -4$

(2) 接線 ℓ は，点 A(2, 1) を通り
傾きが -4 の直線である．
よって，その方程式は

$$y - 1 = -4(x - 2)$$

すなわち

$$y = -4x + 9$$



練習 6.11 関数 $y = 2x^2 - 4x + 3$ のグラフ上に点 A(2, 3) をとる．

(1) 点 A における接線の傾きを求めよ．

(2) 点 A における接線の方程式を求めよ．

一般に，次のことがいえる．

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

B グラフ上にない点から引いた接線

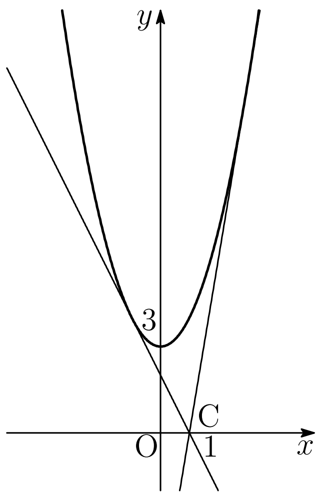
応用例題 6.2 関数 $y=x^2+3$ のグラフに点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ から引いた接線は2本ある．この2本の接線の方程式を求めよ．

考え方　接点の x 座標を a とすると，y 座標は a^2+3 である．点 $(a,\ a^2+3)$ における接線の方程式を求め，接線が点Cを通ることを式で表す．

【解】 $y=x^2+3$ を微分すると　　$y'=2x$

接点の座標を (a, a^2+3) とすると，接線の傾きは $2a$ となるから，その方程式は

$$y-(a^2+3)=2a(x-a) \qquad \cdots①$$



この直線が点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ を通るから

$$0-(a^2+3)=2a(1-a)$$

よって　　$a^2-2a-3=0$

すなわち　　$(a+1)(a-3)=0$

$$a=-1,\ 3$$

したがって，接線の方程式は，

① より

$a=-1$ のとき　　$y-4=-2(x+1)$

$a=3$ のとき　　$y-12=6(x-3)$

（答）$y=-2x+2$ と $y=6x-6$

［注意］　上で求めた点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ を通る接線の方程式は，傾きを m とすると，$y=m(x-1)$ の形に表される．

練習 6.12 関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフに原点Oから引いた接線は2本ある．この2本の接線の方程式を求めよ．

6.1.4 補充問題

1 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする．

(1) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h}$　　(2) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{2(a+h)^2 - 2a^2}{h}$

2 次の関数を t で微分せよ.

(1) $y = 3t^2 - 4t + 2$ (2) $f(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^2$

3 点 $\mathrm{C}(1, 0)$ から関数 $y = x^3$ のグラフに引いた接線の方程式を求めよ.

【答】

1 (1) -2 (2) $4a$

2 (1) $y' = 6t - 4$ (2) $f'(t) = -t + 1$

3 $y = 0$, $y = \frac{27}{4}x - \frac{27}{4}$

6.2　関数の値の変化

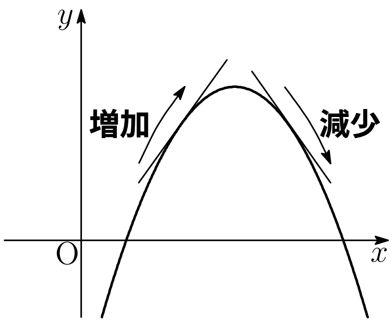
6.2.1　関数の増減と極大・極小

関数の増減とグラフの関係は，次のようになっている．

　増加　$\cdots$　グラフは右上がり

　減少　$\cdots$　グラフは右下がり

そこで，グラフの接線の傾きから，
関数の増減のようすを調べてみよう．



A 関数の増減と導関数

関数 $f(x) = x^2 - 4x$ の導関数は

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

であるから，$y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは

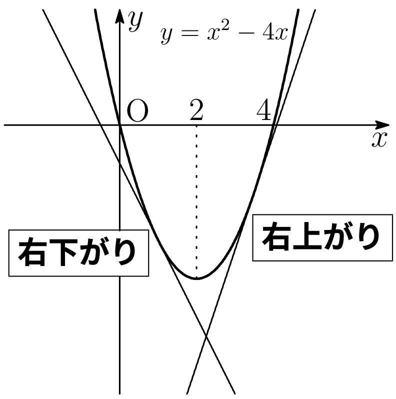
$$f'(a) = 2(a - 2)$$

［1］$a < 2$ では　$f'(a) < 0$

このとき，A における接線は右下がりであり，グラフも右下がりである．

［2］$a > 2$ では　$f'(a) > 0$

このとき，A における接線は右上がりであり，グラフも右上がりである．



以上から，関数 $f(x) = x^2 - 4x$ の増減について，次のことがいえる．

$$x < 2 \text{ では減少し，} x > 2 \text{ では増加する．}$$

一般に，次のことが成り立つ．

$f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増減

関数 $f(x)$ の増減は，次のようになる．

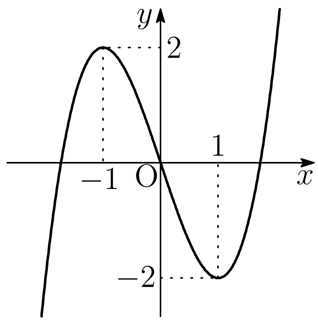
$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲では増加し，

$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲では減少する．

［注意］ 常に $f'(x) = 0$ となる x の値の範囲では，$f(x)$ は一定の値をとる．

例 6.8　関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べる．

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$



$f'(x) = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲は

$$x < -1,\ 1 < x$$

$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲は

$$-1 < x < 1$$

よって，$f(x)$ の増減は，右のような表で表される．

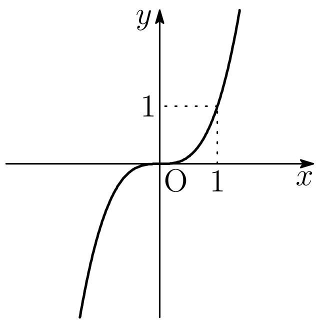
↗ は増加，↘ は減少を表す．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

［注意］ 例 6.8 で示したような表を**増減表**という．

例 6.9　関数 $f(x) = x^3$ の増減を調べる．

$$f'(x) = 3x^2 \geqq 0$$

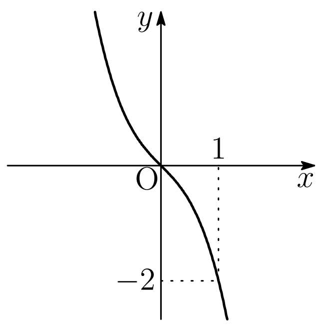


増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

よって，$f(x)$ は常に増加する．

例 6.10 関数 $f(x) = -x^3 - x$ の増減を調べる．



$$f'(x) = -3x^2 - 1$$

$x^2 \geqq 0$ であるから，常に

$$f'(x) < 0$$

よって，$f(x)$ は常に減少する．

練習 6.13 次の関数の増減を調べよ．

(1)　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$　　(2)　$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

(3)　$f(x) = x^3 + 2x$　　(4)　$f(x) = -x^3$

B 関数の極大・極小

例 6.8 の関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減表をみると，$f(x)$ の増減が入れ替わるような x の値がある．

一般に，関数 $f(x)$ が $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき，

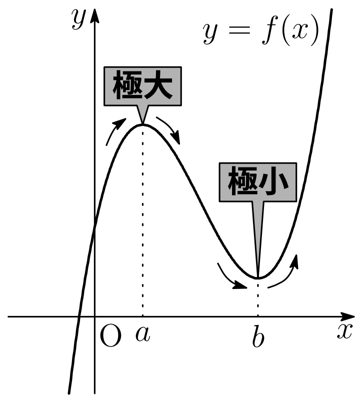
$f(x)$ は $x = a$ で**極大**である

といい，$f(a)$ を**極大値**という．

また，$x = b$ を境目として減少から増加に移るとき，

$f(x)$ は $x = b$ で**極小**である

といい，$f(b)$ を**極小値**という．



例 6.11　例 6.8 の関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の極大値，極小値

$x = -1$ で極大であり，
極大値は 2
$x = 1$ で極小であり，
極小値は -2

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

極大値と極小値をまとめて**極値**という．

常に増加または常に減少する関数は，増減が入れ替わることはないから，極値をもたない．たとえば，1 次関数や例 6.9 の関数 $f(x) = x^3$，例 6.10 の関数 $f(x) = -x^3 - x$ などは極値をもたない．

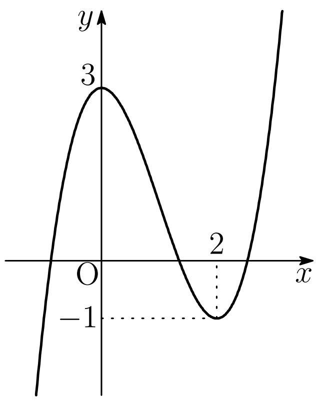
関数の極値を求めたりグラフをかくためには，増減表を作って関数の増減を調べればよい．

例題 6.3　関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

【解】　$y' = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$
$y' = 0$ とすると
$x = 0,\ 2$
y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

したがって，この関数は
$x = 0$ で極大値 3,
$x = 2$ で極小値 -1
をとる．
また，グラフは右の図のようになる．



練習 6.14 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ.

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(2) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

(3) $y = 2x^3 + 4x$

(4) $y = -x^3 + 2$

x の多項式で表される関数 $f(x)$ については，次のことがいえる．

関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとれば，$f'(a) = 0$ である．

[注意]　逆に，$f'(a) = 0$ であっても $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとは限らない．たとえば，例 6.9 で調べたように，$f(x) = x^3$ については $f'(0) = 0$ であるが，$f(x)$ は $x = 0$ で極値をとらない．

応用例題 6.3 関数 $f(x) = x^3 + ax + b$ が $x = 2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ．また，極大値を求めよ．

考え方 $f(x)$ が $x = 2$ で極小値 -6 をとるとき，$f'(2) = 0$ かつ $f(2) = -6$ が成り立つ．

【解】 $f(x) = x^3 + ax + b$ を微分すると　$f'(x) = 3x^2 + a$

$f(x)$ が $x = 2$ で極小値 -6 をとるとき

$$f'(2) = 0, \qquad f(2) = -6$$

よって　$12 + a = 0, \qquad 8 + 2a + b = -6$

これを解くと　$a = -12$，$b = 10$

このとき　$f(x) = x^3 - 12x + 10$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

したがって，右の増減表が得られる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 26	$\searrow$	極小 -6	$\nearrow$

(答)　$a = -12$，$b = 10$

極大値 26

練習 6.15 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ が $x = -1$ で極大値 8 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ．また，極小値を求めよ．

6.2.2 関数の増減・グラフの応用

関数の増減やグラフを利用して，関数の最大値，最小値を求めたり，方程式の実数解の個数を調べよう．

A 関数の最大・最小

例題 6.4 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

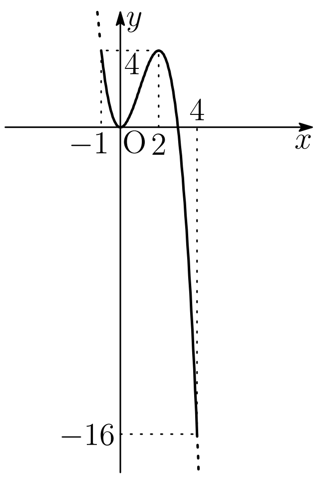
$$y=-x^3+3x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 4)$$

【解】 $y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

y の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	↘	極小 0	↗	極大 4	↘	-16



よって，この関数は

$x=-1,\ 2$ で最大値 4 をとり，

$x=4$ で最小値 -16 をとる．

例題 6.4 の関数では，関数の最大値は極大値と一致する．しかし，最小値は極小値とは一致しない．

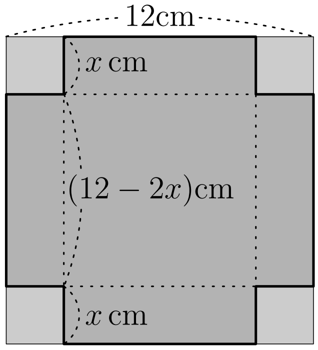
このことからもわかるように，関数の最大値，最小値を求めるには，極値と定義域の端における関数の値との大小も調べる必要がある．

練習 6.16 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^3 + 3x^2 \quad (-3 \leqq x \leqq 1)$

(2) $y = -x^3 + 3x + 2 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

応用例題 6.4 1辺が 12cm の正方形の厚紙の四隅から，同じ大きさの正方形を右の図のように切り取って，ふたのない箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の1辺の長さを何 cm にすればよいか．



考え方 求める長さを x cm，箱の容積を y cm^3 として，x の関数 y の増減を調べる．x のとる値の範囲にも注意する．

【解】 切り取る正方形の1辺の長さを x cm，箱の容積を y cm^3 とする．

$x>0$，$12-2x>0$ であるから

$$0<x<6 \qquad \cdots ①$$

このとき

$$y = x(12-2x)^2 = 4(x^3-12x^2+36x)$$
$$y' = 12(x^2-8x+12) = 12(x-2)(x-6)$$

① の範囲において，y の増減表は，右のようになる．

したがって，y は $x=2$ で最大になる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

(答) 2cm

練習 6.17 応用例題6.4において，正方形の厚紙の代わりに，縦 10cm，横 16cm の長方形の厚紙で箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか．

B 方程式への応用

方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数に等しい．次のように，方程式の実数解の個数を調べるのに，関数のグラフを利用する方法がある．

応用例題 6.5 方程式 $x^3+3x^2=a$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

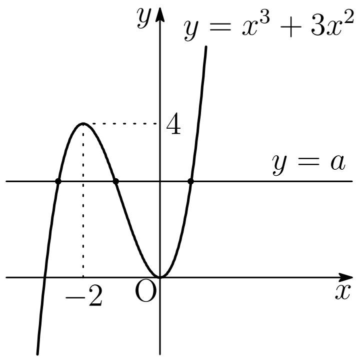
考え方 方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい．

【解】 関数 $y=x^3+3x^2$ について

$$y'=3x^2+6x$$
$$=3x(x+2)$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

y の増減表は，右のようになる．
よって，$y=x^3+3x^2$ のグラフは，右の図のようになる．
求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから



$$0<a<4$$

[注意] 方程式 $x^3+3x^2=a$ の実数解の個数は，さらに次のようになる．

$$a=0,\ 4 \text{ のとき } 2 \text{ 個}, \qquad a<0,\ 4<a \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

練習 6.18 方程式 $x^3-6x^2=a$ がただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

C 不等式への応用

関数 $f(x)$ の最小値が 0 であるとき，$f(x) \geqq 0$ が成り立つ．
このことを利用して，不等式を証明してみよう．

応用例題 6.6 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

$$x^3 + 4 \geqq 3x^2$$

考え方 $x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x) = (x^3 + 4) - 3x^2$ の最小値が 0 であることを示せばよい．

[証明] $f(x) = (x^3 + 4) - 3x^2$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．
よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x = 2$ で最小値 0 をとる．
したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^3 + 4) - 3x^2 \geqq 0$$

すなわち $$x^3 + 4 \geqq 3x^2$$

等号が成り立つのは，$x = 2$ のときである． **[証終]**

練習 6.19 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

$$x^3 + 3x \geqq 3x^2$$

6.2.3 補充問題

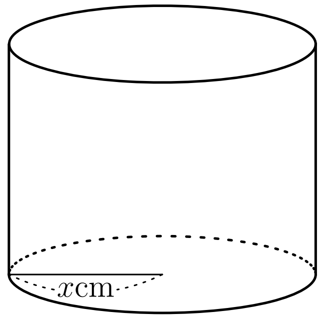
4 次の関数の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ．

(1) $y = x^3 - 6x + 2$

(2) $y = (1 - x)^3$

5 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = -3$ で極大値をとり，$x = 1$ で極小値 -12 をとるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

6 底面の直径と高さの和が 18cm である直円柱の体積を $V\mathrm{cm}^3$ とする．



(1) 底面の半径を x cm とするとき，V を x の式で表せ．

(2) V が最大となるのは，円柱の高さが何 cm のときか．

7 関数 $y = x^3 - 6x^2 + a$ のグラフが x 軸と異なる 3 点を共有するとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

【答】

4 (1) $x = -\sqrt{2}$ で極大値 $2 + 4\sqrt{2}$，$x = \sqrt{2}$ で極小値 $2 - 4\sqrt{2}$　(2) 極値なし

5 $a = 3,\ b = -9,\ c = -7$

6 (1) $V = x^2(18 - 2x)\pi$　(2) 6cm

7 $0 < a < 32$

6.3 積分法

6.3.1 不定積分

これまでは関数の導関数を求めることを学んできたが，逆に導関数がわかっている場合に，もとの関数を求めることを考えてみよう．

A 導関数と不定積分

微分すると $f(x)$ になる関数を，$f(x)$ の**原始関数**という．
すなわち，$F'(x) = f(x)$ のとき，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

例 6.12 $(x^2)' = 2x$ であるから，x^2 は $2x$ の原始関数である．
さらに，$x^2 + 3$，$x^2 - 5$ なども，$2x$ の原始関数である．

練習 6.20 $3x^2$ の原始関数であるものを，次の中から選べ．

① $6x$ ② x^3 ③ $x^3 + 2x$ ④ $x^3 - 4$

例 6.12 からもわかるように，$2x$ の原始関数はいくつもあるが，それらの違いは，定数部分だけである．

一般に，関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数 $F(x)$ がわかっていれば，$f(x)$ の任意の原始関数は,「$F(x)$ + 定数」の形に表される．
この定数を**積分定数**といい，記号 $\boldsymbol{C}$ で表して，$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x) + C$ と表示する．

この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ で表す[2]．

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**という．
関数 $f(x)$ の不定積分については，次のようにまとめられる．

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C} \qquad \text{ただし，} C \text{ は積分定数}$$

今後，本書では「C は積分定数」の断りを省略する．

[2] 不定積分を原始関数と同じ意味で用いることもある．
$\int$ は「積分」または「インテグラル」と読む．

例 6.13 $(x)' = 1$，$\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)' = x$，$\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$
であるから

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

微分する

$$\int x^2 dx = \boxed{\frac{1}{3}x^3 + C}$$

積分する

[注意] $\displaystyle\int 1\,dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くこともある．

例 6.13 の結果より，$n = 0$，1，2 について，関数 x^n の不定積分は，次のようになる．

x^n の不定積分

$$\boldsymbol{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

[注意] $\displaystyle\int x^0\,dx$ は $\displaystyle\int 1\,dx$ のことである．

B 不定積分を求める

関数の定数倍および和，差の不定積分について調べよう．
$F'(x) = f(x)$ であるとする．このとき，定数 k に対して

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

となるから，$kF(x)$ は関数 $kf(x)$ の原始関数の 1 つである．

すなわち
$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C$$

同様にして，次のことがいえる．

関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x)$ のとき

1 $\displaystyle \boldsymbol{\int kf(x)\,dx = kF(x) + C}$　　k は定数

2 $\displaystyle \boldsymbol{\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = F(x) + G(x) + C}$

3 $\displaystyle \boldsymbol{\int \{f(x) - g(x)\}\,dx = F(x) - G(x) + C}$

上の性質と前ページに示した「x^n の不定積分」を使って，x の多項式で表される関数の不定積分を求めてみよう．

例題 6.5 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle \int 4x^2\,dx$　　　(2) $\displaystyle \int (3x^2 - 5x + 2)\,dx$

【解】 (1) $\displaystyle \int 4x^2\,dx = 4\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = \frac{4}{3}x^3 + C$

(2) $$\begin{aligned}\int (3x^2 - 5x + 2)\,dx &= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 5\cdot\frac{1}{2}x^2 + 2x + C\\ &= x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C\end{aligned}$$

練習 6.21 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle \int 6x^2\,dx$　　　(2) $\displaystyle \int (x^2 + x - 1)\,dx$

(3) $\displaystyle \int (3x^2 - 2x + 5)\,dx$　　　(4) $\displaystyle \int (2x^2 - 3x - 4)\,dx$

(5) $\displaystyle \int (-2x^2 + 4x + 6)\,dx$　　　(6) $\displaystyle \int (-4x^2 + 8x - 3)\,dx$

不定積分は，変数が x 以外の関数についても同様に考える．
たとえば，t の関数については，次のようになる．

$$\int 1\,dt = t + C, \qquad \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C, \qquad \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C$$

応用例題 6.7 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ．

［1］$F'(t) = 3(t-1)^2$ ［2］$F(1) = 0$

考え方 ［1］から $3(t-1)^2$ の不定積分として $F(t)$ を求める．さらに,［2］から積分定数 C の値を決める．

【解】 ［1］から
$$\begin{aligned} F(t) &= \int 3(t-1)^2\,dt \\ &= \int (3t^2 - 6t + 3)\,dt \\ &= t^3 - 3t^2 + 3t + C \end{aligned}$$

よって $F(1) = 1^3 - 3{\cdot}1^2 + 3{\cdot}1 + C = C + 1$

［2］から，$C + 1 = 0$ であり $C = -1$

したがって $F(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$

練習 6.22 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ．

［1］$F'(t) = 2(t-1)$ ［2］$F(0) = 0$

6.3.2 定積分

関数 $f(x)=2x$ の原始関数 $F(x)$ は1つに定まらないが，たとえば $F(3)-F(1)$ の値は，1つに定まるのである．このことについて学ぶことにしよう．

A 定積分

関数 $f(x)=2x$ の任意の原始関数 $F(x)$ は，

$$F(x)=x^2+C \qquad C\text{ は定数}$$

の形で表される．ここで，たとえば，$F(3)-F(1)$ の値を計算してみると

$$F(3)-F(1)=(3^2+C)-(1^2+C)=8$$

となり，定数 C とは無関係な値になる．

一般に，関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とし，a，b を $f(x)$ の定義域内の任意の値とするとき， $F(b)-F(a)$ の値は $F(x)$ の選び方とは無関係に，a，b の値だけで定まる．この $F(b)-F(a)$ を

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx}$$

と書き，これを関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分**[3]という．このとき，a を**下端**（かたん），b を**上端**（じょうたん）という．a と b の大小関係は，$a<b$，$a=b$，$a>b$ のいずれでもよい．また，$F(b)-F(a)$ を $\Big[\boldsymbol{F(x)}\Big]_a^b$ とも書く．

以上をまとめると，次のようになる．

定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)}$$

例 6.14 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ の計算

$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$ であるから

$$\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8-1}{3}=\frac{7}{3}$$

[3] 定積分は図形の面積に関連する．このことは 256 ページ以降で扱っている．

練習 6.23 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^2 1\,dx$

例題 6.6 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (-x^2+3x)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+4)(x-2)\,dx$

【解】 (1)
$$\begin{aligned}\int_0^1 (-x^2+3x)\,dx &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 1^2\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 0^2\right) \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x+4)(x-2)\,dx &= \int_{-1}^2 (x^2+2x-8)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{3}+2^2-8\cdot 2\right)-\left\{\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2-8(-1)\right\} \\ &= -18\end{aligned}$$

練習 6.24 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^1 (-3x^2+x+1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)(x-4)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^1 2(x+3)(x-2)\,dx$

B 定積分の性質

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とすると

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b = \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$
$$= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\} = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

同様にして，次の公式が得られる．

関数の定数倍および和，差の定積分

1　$\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$　　k は定数

2　$\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$

3　$\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx}$

例 6.15 k を定数とするとき

$$\int_1^2 (x^2+kx)dx = \int_1^2 x^2\,dx + k\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= \frac{2^3-1^3}{3} + k\cdot\frac{2^2-1^2}{2} = \frac{7}{3}+\frac{3}{2}k$$

例 6.16 $\displaystyle\int_0^1 (-x^2+2x)\,dx - \int_0^1 (2x^2-1)\,dx$ $\longleftarrow$ 公式 **3** の右辺から左辺を導く変形

$$= \int_0^1 \{(-x^2+2x)-(2x^2-1)\}dx$$
$$= \int_0^1 (-3x^2+2x+1)dx$$
$$= \Big[-x^3+x^2+x\Big]_0^1 = -1^3+1^2+1 = 1$$

練習 6.25 次の定積分を求めよ．ただし，k は定数とする．

(1) $\displaystyle\int_1^4 (kx^2+3x)dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+2)^2dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2dx$

定積分の上端，下端に関する性質として，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1　$\displaystyle\boldsymbol{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$　　　**2**　$\displaystyle\boldsymbol{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$

3　$\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$

[注意] 性質 **3** は，a，b，c の大小に関係なく成り立つ．

[3 の証明]　$F'(x) = f(x)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b \\ &= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} = F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

[証終]

練習 6.26 上の性質 **1** が成り立つことを示せ．また，性質 **1**，**3** を用いて，性質 **2** が成り立つことを示せ．

C $f(t)$ の定積分

t を変数とする関数の定積分は，次のようになる．

$$F'(t) = f(t) \text{ のとき} \qquad \int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

すなわち，次の等式が成り立つ．

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

したがって，定積分の値は変数が違っても同じになる．

関数 $f(t)$ に対して $F'(t) = f(t)$ のとき，$f(t)$ の定積分

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

← 上端が x で，下端が定数 a

は，x の関数である．右辺の関数を x で微分すると

$$F'(x) - (F(a))' = f(x)$$

← $F(a)$ は定数で $(F(a))' = 0$

となるから，次のことが成り立つ．

a を定数とするとき

x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数は $f(x)$ である．

[注意] x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数を $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$ で表すこともある．

応用例題 6.8 等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 3x + 2$ が，任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

考え方 等式の両辺を x で微分する．また，与えられた等式の両辺で $x = a$ とおくと，$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$ が利用できる．

【解】 等式の両辺を x で微分すると $\qquad f(x) = 2x - 3$

また，与えられた等式で $x = a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - 3a + 2$$

これを解くと $\qquad a = 1,\ 2$

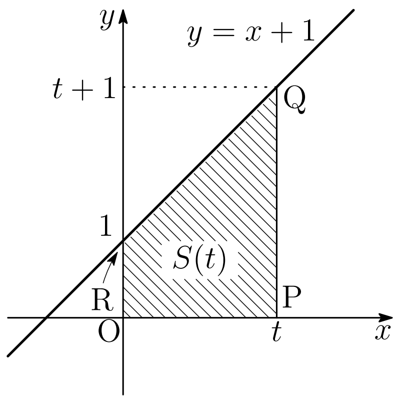
(答) $f(x) = 2x - 3,\ a = 1,\ 2$

練習 6.27 等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x - 2$ が，任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

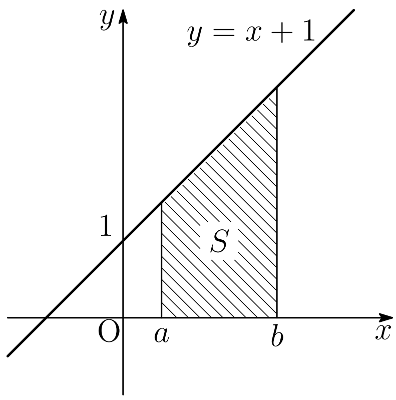
6.3.3　図形の面積と定積分

関数 $f(x)$ の定積分は，$y = f(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積に関係がある．1 次関数については，グラフが直線になるから，面積が調べやすい．たとえば，関数 $f(x) = x + 1$ について，調べてみよう．

［1］



［2］



［1］ 図において，$y = x + 1$ のグラフと x 軸および y 軸，直線 $x = t$ で囲まれた斜線部分の面積[4]は，t の関数である．これを $S(t)$ とすると

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \{1 + (t + 1)\} \times t = \frac{1}{2}t^2 + t$$

よって　　$S'(t) = t + 1$

すなわち，$S'(x) = x + 1$ であるから，$S'(x) = f(x)$ が成り立つ．

［2］ 図において，$y = x + 1$ のグラフと x 軸および直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた斜線部分の面積 S は，［1］ の関数 $S(t)$ を用いると

$$S = S(b) - S(a)$$

となるが，$S'(x) = f(x)$ であるから，S は次のようにも表される．

$$S = \Big[S(x)\Big]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$$

[4] 台形 OPQR の面積 S は，$S = \dfrac{1}{2} \times (\mathrm{OR} + \mathrm{PQ}) \times \mathrm{OP}$　で表される．

A 定積分の図形的な意味

定積分と面積の関係を2次関数 $y = x^2$ のグラフで考えてみよう．

下の図［1］において，$y = x^2$ のグラフと x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた斜線部分の面積は，t の関数である．この関数を $S(t)$ とする．
このとき，$S'(t) = t^2$ であることを示そう．そのために，

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} \qquad \cdots ①$$

を考え，h を限りなく0に近づけてみる．

まず，$h > 0$ の場合で考える．

図［2］において，斜線部分の面積は $S(t+h) - S(t)$ であり，これと2つの長方形APQB，APRCの面積の大小関係を考えると，次の不等式が成り立つ．

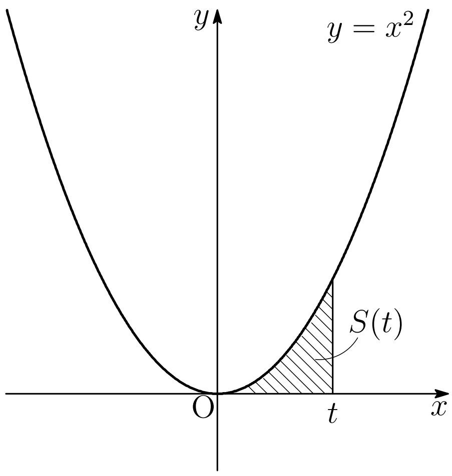
$$ht^2 < S(t+h) - S(t) < h(t+h)^2$$

$h > 0$ であるから $$t^2 < \frac{S(t+h) - S(t)}{h} < (t+h)^2$$

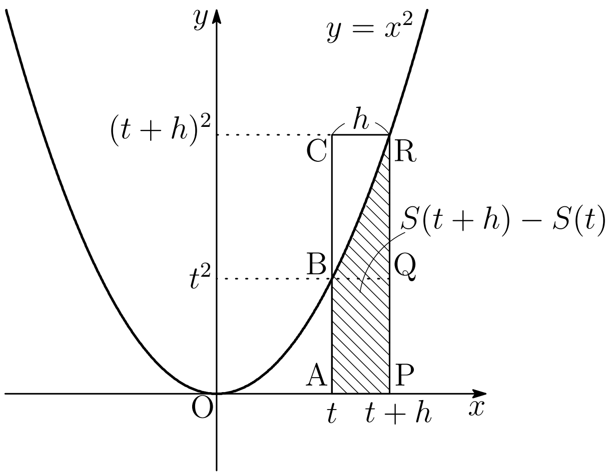
ここで，h を限りなく0に近づけると，$(t+h)^2$ は限りなく t^2 に近づく．
よって，このとき，① の値も限りなく t^2 に近づくといえる．

$h < 0$ の場合も，同様である．

［1］



［2］



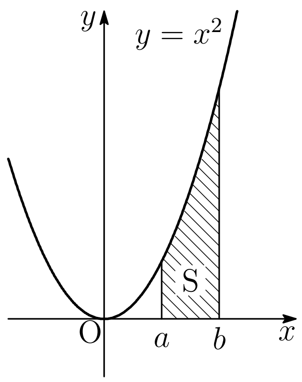
前ページで調べたことから，次のことがいえる．

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = t^2 \qquad \text{すなわち} \qquad S'(t) = t^2$$

ところで，$y=x^2$ のグラフと x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を S とすると，S は $S(t)$ を使って

$$S = S(b) - S(a)$$

と表される．



よって，定積分の定義と性質により

$$S = \Big[S(t)\Big]_a^b = \int_a^b t^2\,dt = \int_a^b x^2\,dx$$

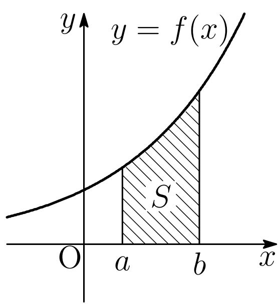
が成り立つ．

一般の関数 $y=f(x)$ についても，次のことが成り立つ．

定積分と図形の面積 (1)

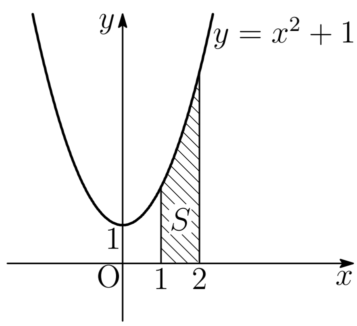
$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および2直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



例 6.17 放物線 $y=x^2+1$ と x 軸および2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_1^2 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{2^3}{3}+2\right) - \left(\frac{1^3}{3}+1\right) = \frac{10}{3}$$



練習 6.28 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) 放物線 $y=x^2$，2 直線 $x=1$，$x=3$

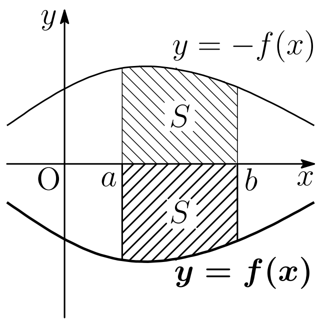
(2) 放物線 $y=x^2+2$，2 直線 $x=-1$，$x=2$

次のことも成り立つ．

定積分と図形の面積 (2)

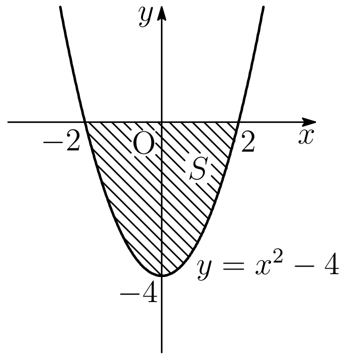
$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \leqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\int_a^b\{-f(x)\}dx}$$



例題 6.7 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

$$y = x^2 - 4$$



【解】 この放物線と x 軸の交点の x 座標は,
$x^2 - 4 = 0$ を解いて

$$x = -2,\ 2$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ では $y \leqq 0$ であるから,
求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} \{-(x^2 - 4)\} dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} \\ &= \left(-\frac{2^3}{3} + 4\cdot 2\right) - \left\{-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2)\right\} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

[注意] 斜線部分は y 軸について対称で, $S = 2\displaystyle\int_{0}^{2} \{-(x^2 - 4)\} dx$ が成り立つ.

練習 6.29 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

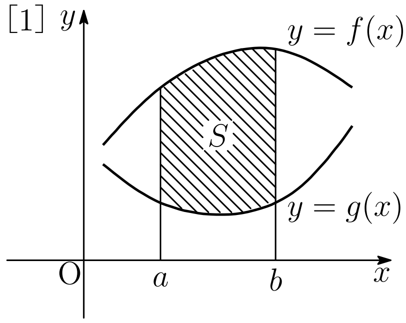
(1) $y = x^2 - 1$

(2) $y = x^2 - 2x$

B 2つの曲線の間の面積

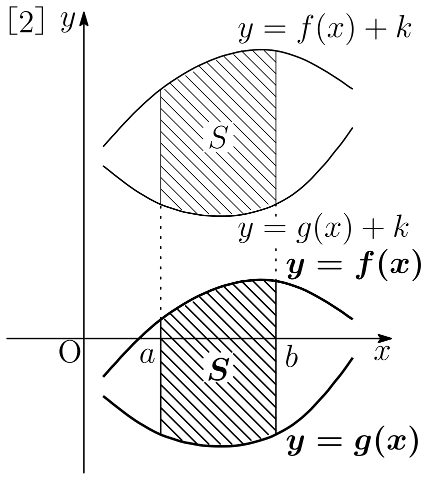
2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が，$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの間の部分の面積を考えてみよう．

右の図［1］の斜線部分の面積 S は，次の式で求められる．



$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\
&= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx
\end{aligned}
$$

図［2］のように，斜線部分全体が x 軸の上側にないときは，2つのグラフを y 軸の正の向きに k だけ平行移動して，斜線部分全体が x 軸の上側になるように移す．すると，上で示したことから



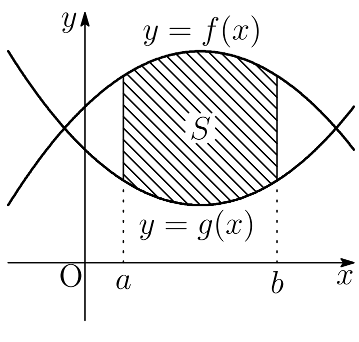
$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx \\
&= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx
\end{aligned}
$$

以上から，次のことが成り立つ．

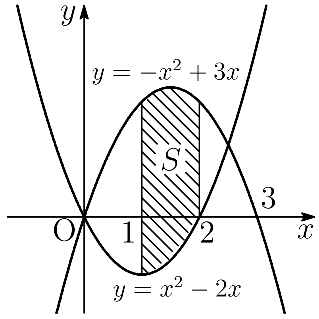
定積分と図形の面積 (3)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$
S = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx
$$



例 6.18 2 つの放物線 $y=x^2-2x$，$y=-x^2+3x$ と 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S は，図から



$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^2 \{(-x^2+3x)-(x^2-2x)\}dx \\
&= \int_1^2 (-2x^2+5x)dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{17}{6}
\end{aligned}
$$

練習 6.30 2 つの放物線 $y=x^2-2$，$y=-x^2+4x$ と 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

応用例題 6.9 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

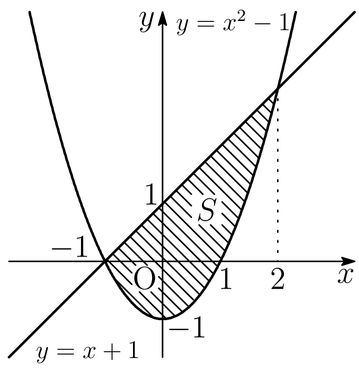
放物線 $y=x^2-1$，直線 $y=x+1$

考え方 放物線と直線の上下関係を調べる．なお，その交点の x 座標は，方程式 $x^2-1=x+1$ の解である．

【解】 方程式 $x^2-1=x+1$ を解くと，
$x^2-x-2=0$ より

$$x=-1,\ 2$$

よって，求める面積 S は，図から



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^2 \{(x+1)-(x^2-1)\}dx \\
&= \int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

練習 6.31 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) 放物線 $y = x^2$，直線 $y = -x + 2$

(2) 放物線 $y = -x^2 + 3$，直線 $y = 2x$

研究

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積

下の図［1］のような放物線 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ が x 軸から切り取る線分の長さは，$\beta-\alpha$ である．ただし，$a>0$ とする．この放物線を x 軸方向に平行移動しても，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積は変わらない．

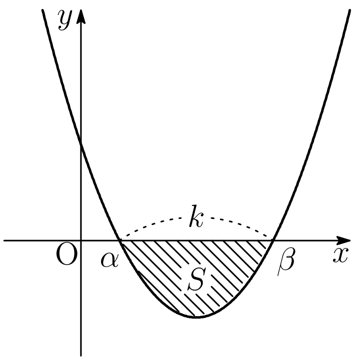
$\beta-\alpha=k$ とおくと，面積 S は図［2］により

$$\begin{aligned} S &= \int_0^k \{-ax(x-k)\}dx \\ &= a\int_0^k (-x^2+kx)dx \\ &= a\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k \\ &= a\left(-\frac{k^3}{3}+\frac{k^3}{2}\right)=\frac{ak^3}{6} \end{aligned}$$

$k=\beta-\alpha$ であるから，$a>0$ のとき，次のことがいえる．

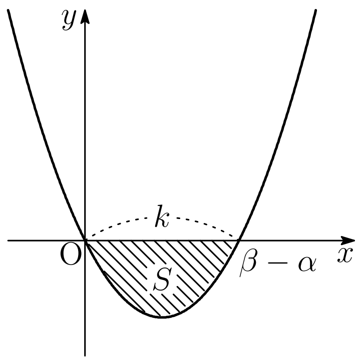
$$S=\int_\alpha^\beta \{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

［1］$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$



x 軸方向に $-\alpha$
平行移動する．
2 次の係数 a
は同じである．

［2］$y=ax(x-k)$



6.3.4 補充問題

8 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x-1)^2dx$

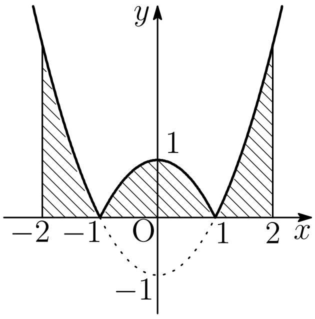
(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(t^2-5t+4)dt$

9 放物線 $y=x^2$ と次の放物線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y=-x^2+2x+4$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2+2$

10 関数 $y = |x^2 - 1|$ のグラフは，右の図のようになる．このグラフと x 軸および 2 直線 $x = -2$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．



【答】

8 (1) 8　(2) $\dfrac{15}{2}$

9 (1) 9　(2) $\dfrac{16}{3}$

10 4

6.4　章末問題

6.4.1　章末問題 A

1 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (2x+1)(1-x^2)$　　(2) $y = (x-2)(x^2+2x+4)$

2 曲線 $y = x^3 - 4x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(3, -9)$ における接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) この曲線の接線で，ℓ に平行なものの接点 B の x 座標を求めよ．

3 関数 $y = x^2(x-a)$ の増減を次の各場合について調べ，極大値がある場合はその極大値を求めよ．ただし，a は定数とする．

(1) $a > 0$　　(2) $a = 0$　　(3) $a < 0$

4 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，$x = 1$ で極大値 5 をとり，$x = 3$ で極小値 1 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ．

5 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x-3)^2dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(t^2-2)dt$

6 関数 $f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}(t-1)(t-2)dt$ の極大値を求めよ.

7 放物線 $y = x^2 - 5$ と x 軸および 2 直線 $x = -3$，$x = 3$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和を求めよ．

8 放物線 $y = x^2 - 3x$ と次の 2 直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y = 0$，$y = 4$

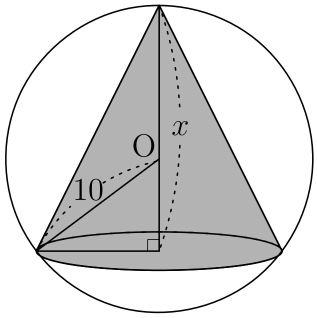
(2) $y = 2x$，$y = -x$

6.4.2　章末問題 B

9 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ．

10 k は定数とする．$x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 - 6x^2 + k \geqq 0$ が成り立つような k の値の最小値を求めよ．

11 右の図のように，半径 10 の球に内接する直円錐（すい）がある．このような直円錐の体積 V の最大値 V_1 と球の体積 V_2 の比を求めよ．



12 どんな 1 次関数 $f(x)$ に対しても，不等式 $\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ が成り立つことを証明せよ．

13 等式 $f(x) = x^2 + 2\int_0^1 f(t)\,dt$ が，任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

14 放物線 $y = x^2 - ax$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{4}{3}$ になるような定数 a の値を求めよ．

15 放物線 $y = x^2 - 2x + 4$ に原点Oから2本の接線を引くとき，放物線と2本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

ヒント

9　常に $f'(x) \geqq 0$ が成り立つ．　**12**　$f(x) = ax + b$ とおく．ただし，$a \neq 0$

13　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = a$ とすると，a は t に無関係な定数で　$f(t) = t^2 + 2a$

【答】

1 (1) $y'=-6x^2-2x+2$　(2) $y'=3x^2$

2 (1) $y=3x-18$　(2) $-\dfrac{1}{3}$　［(2) $y'=3$ となる x の値］

3 極大値は (1) 0　(2) なし　(3) $-\dfrac{4}{27}a^3$　$\left[y'=3x\left(x-\dfrac{2}{3}a\right)\right]$

4 $a=1$，$b=-6$，$c=9$，$d=1$　［$f'(1)=0$，$f'(3)=0$，$f(1)=5$，$f(3)=1$］

5 (1) $\dfrac{172}{3}$　(2) $-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

6 $x=1$ で極大値 0

7 $\dfrac{40\sqrt{5}}{3}-12$　$\left[2\left\{\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}}(-x^2+5)dx+\int_{\sqrt{5}}^{3}(x^2-5)dx\right\}\right]$

8 (1) $\dfrac{49}{3}$　(2) $\dfrac{39}{2}$　$\left[(1)\ \displaystyle\int_{-1}^{4}\{4-(x^2-3x)\}dx-\int_0^3\{-(x^2-3x)\}dx\right.$

$\left.(2)\ \displaystyle\int_0^2\{2x-(-x)\}dx+\int_2^5\{2x-(x^2-3x)\}dx\right]$

9 $k\geqq 3$

10 $k=32$　［$(y=x^3-6x^2+k$ の最小値$)\geqq 0$］

11 $V_1:V_2=8:27$　$\left[\text{直円錐の高さを } x \text{ とすると } V=\dfrac{1}{3}\pi x^2(20-x)\ (0<x<20)\right]$

12 $\left[f(x)=ax+b \text{ とおくと } \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{a}{2}+b,\ \int_0^1\{f(x)\}^2dx=\frac{a^2}{3}+ab+b^2\right]$

13 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}$　$\left[\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=a \text{ とすると } \int_0^1(t^2+2a)dt=a\right]$

14 $a=2,-2$

$\left[a>0 \text{ のとき } \displaystyle\int_0^a(-x^2+ax)dx=\frac{4}{3},\ a<0 \text{ のとき } \int_a^0(-x^2+ax)dx=\frac{4}{3}\right]$

15 $\dfrac{16}{3}$　$\left[\displaystyle\int_{-2}^{0}\{(x^2-2x+4)-(-6x)\}dx+\int_0^2\{(x^2-2x+4)-2x\}dx\right]$